

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457199

排名 - 1199

多变量微积分笔记22——空间曲面的通量

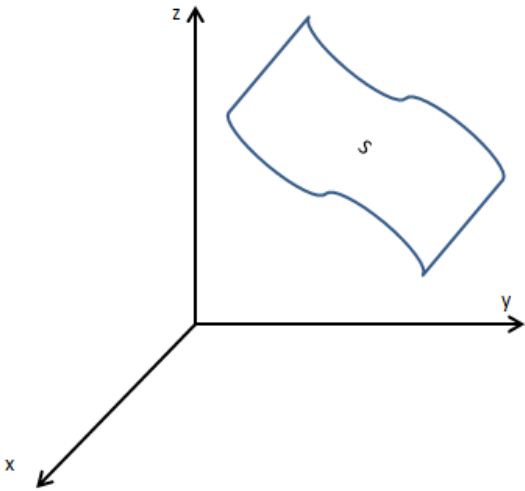
在上一章中，我们知道了怎样计算球面和柱面的通量，但是很多时候，空间的曲面不容易用球坐标或柱坐标表示，此时怎样计算通量？

曲面S的通量

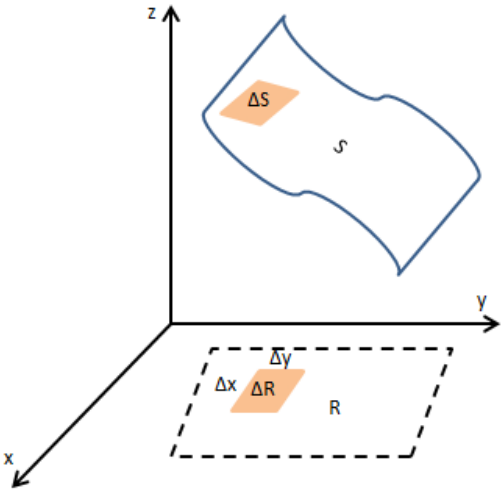
上一章提到，在空间向量场F中有一个曲面S，S的通量是：

$$Flux = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

我们使用不同的方法在各种情况下得到面积积元dS和单位法向量n，比如在球面和柱面中使用球坐标和柱坐标。但是对于其它曲面应当如何处理？如下图所示，假设S是z = f(x,y)的图像，如何计算在向量场中S的通量？



现在将S投影到xy平面，如下图所示：



ΔS和ΔR是S和R上的小矩形，其中ΔR是ΔS的投影，Δx和Δy分别是ΔR的两边。当然，由于S可能是弯曲的，ΔS也会稍有弯折，但当其足够小时，大体上是个矩形。为了不至于太过混乱，下图将ΔS和ΔR放大并单独展示：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

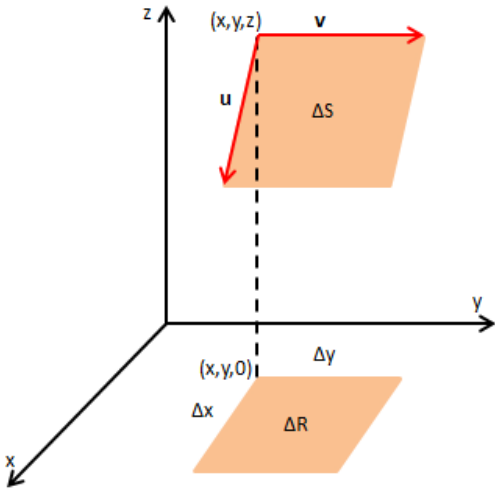
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



ΔR 的一个顶点的值是 $(x,y,0)$ ，它在 ΔS 上对应的点是 (x,y,z) 。将 ΔS 的两个临边用向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 表示，它们的叉积就是 ΔS 的面积：

$$\hat{n}dS = d\vec{S} = \vec{v} \times \vec{u}$$

上式将单位向量简化为 $d\mathbf{S}$ ，而叉积除了表示面积大小外，也表示了方向信息。现在，问题转换为计算 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 。

已知 $\mathbf{v}$ 的起点是 (x,y,z) ，终点是 $(x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ ，其中：

$$\Delta z \approx \underbrace{\Delta x f_x}_{0} + \Delta y f_y = \Delta y f_y$$

$$\vec{v} \approx \langle x, y + \Delta y, z + \Delta y f_y \rangle - \langle x, y, z \rangle = \langle 0, \Delta y, \Delta y f_y \rangle$$

同理：

$$\vec{u} \approx \langle x + \Delta x, y, z + \Delta x f_x \rangle - \langle x, y, z \rangle = \langle \Delta x, 0, \Delta x f_x \rangle$$

$$\Delta \vec{S} = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \Delta y & \Delta y f_y \\ \Delta x & 0 & \Delta x f_x \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle \Delta x \Delta y$$

$$\hat{n}dS = d\vec{S} = \pm \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle dx dy$$

最终得到通量计算公式：

$$Flux = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}dS = \pm \iint_R \vec{F} \cdot \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle dx dy$$

正负号取决于法向量的方向。因为等式右侧已经变成了xy平面的二重积分，所以出于习惯，积分域由S变成了R。

曲面的积分域

如下图所示，求 $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$ 通过 $z = x^2 + y^2$ 在单位圆上方曲面的通量。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

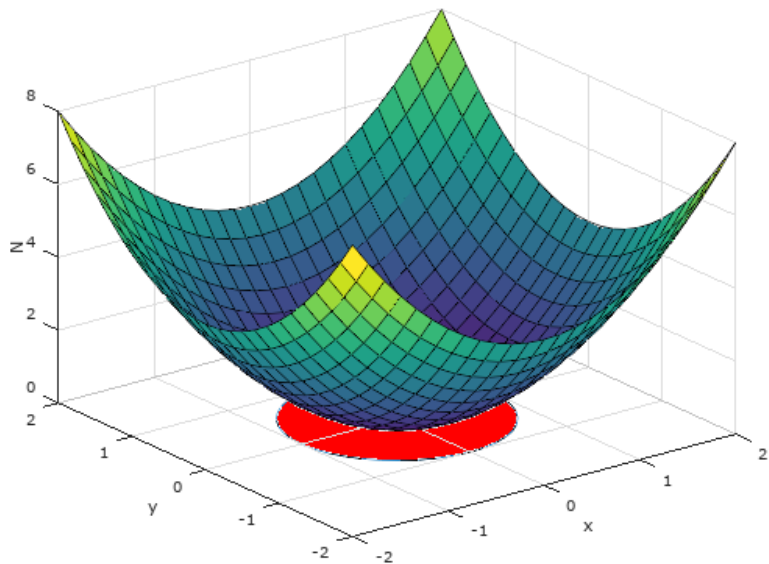
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

\$v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU



$$\begin{aligned} & \iint_R \vec{F} \cdot \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle dx dy \\ &= \iint_R \langle 0, 0, z \rangle \cdot \langle -2x, -2y, 1 \rangle dx dy \\ &= \iint_R z dx dy \\ &= \iint_R x^2 + y^2 dx dy \end{aligned}$$

现在问题转换为如何求得曲面的积分域，从而使上式变成普通的二重积分。这需要借助曲面在xy平面的投影，在本例中，曲面的投影恰好是单位圆，可以使用极坐标处理：

$$\iint_S x^2 + y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \frac{\pi}{2}$$

示例

函数 $z = x^2 + y^2$ 的一块区域中在xy平面的投影是单位正方形，并起这块区域满足 $z > 0$ ，计算该区域在场 $F = z\mathbf{i} + x\mathbf{k}$ 中的通量。

如果是求向上的通量，根据公式：

$$\begin{aligned} Flux &= \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_R \vec{F} \cdot \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle dx dy \\ \vec{F} \cdot \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle &= \langle z, 0, x \rangle \cdot \langle -2x, -1, 1 \rangle \\ &= -2zx + x \\ &= -2(x^2 + y^2)x + x \\ &= -2x^3 - 2xy + x \\ Flux &= \iint_R -2x^3 - 2xy + x dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 -2x^3 - 2xy + x dx dy = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 多变量微积分

标签: 空间曲面的面积

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

+加关注

0
推荐

0
反对

« 上一篇: [线性代数笔记7——再看行列式与矩阵](#)
» 下一篇: [多变量微积分笔记23——散度定理](#)

posted on 2018-06-04 10:27 我是8位的 阅读(1618) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

FinalUI Core

12,000

800

900

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

广告 X

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes